

# MPS 法による流れの数値計算

Key Words : Numerical simulation , MPS method, Navier-Stokes equations,  
Equation of continuity, Dam bursting problem, Sloshing problem

## 1. 緒言

数値流体力学ではある流れ場を解析するとき、有限要素法や有限体積法、差分法など格子を用いる方法が主流である。しかし、これらの格子を用いる方法では流れが複雑になる場合、解析が困難になる。そこで粒子法という方法が用いられる。

粒子法とは、流れを形成している流体の塊を粒子とみなして、その粒子一つ一つを追跡して解析する方法である。この方法であれば、複雑な流れや飛び散る飛沫なども解析可能である。そして、MPS 法はこの粒子法の一つである。

本研究では、MPS 法を用いて流れが大変形するものを解析するのが目的である。

## 2. MPS 法

MPS 法<sup>(1)</sup>は、流体粒子に粒子間相互作用が働いているものとして計算を行う方法である。しかし、MPS 法で用いられる粒子は分子と同じではなく、ブラウン運動を考慮することのない程度の大きさ以上のものを流体の塊として捉えている。

### 2.1 重み関数

MPS 法では粒子間相互作用を重み関数  $w(r)$  に基づいて行う。重み関数の定義として、

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e - r}{r_e} & r \leq r_e \\ 0 & r_e < r \end{cases} \quad (1)$$

が用いられる。ここで  $r$  は 2 つの粒子間の距離、 $r_e$  は粒子間相互作用の及ぶ範囲を制限するものである。

粒子  $i$  の位置における粒子数密度を次のように定義する。

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (2)$$

これは近傍の粒子  $j$  の重み関数の和をとったものである。また、粒子数密度を一定としたものを  $n^0$  とする。

### 2.2 支配方程式

流体に与える支配方程式として連続の式(3)とナビエ・ストークス方程式(4)を示す。

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (4)$$

ここで、粒子の密度  $\rho$ 、時間  $t$ 、速度  $\vec{u}$ 、圧力  $P$ 、動粘度  $\nu$ 、外力  $\vec{f}$  とする。

### 2.3 粒子モデル

ナビエ・ストークス方程式の各項を粒子モデル (グラディエントモデルとラプラシアンモデル) で置き換える。

MPS 法では粒子  $i$  の位置におけるグラディエントを次のモデルで表す。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[ \frac{\phi_j - \phi_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \cdot \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (5)$$

ここで  $\phi$  は変数、 $d$  を空間の次元数とする。

グラディエントモデルを使って、粒子の位置、速度の補正を行う。

次に、ラプラシアンモデルを示す。

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)] \quad (6)$$

ここで  $\lambda$  は次のように定義する。

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} [w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) |\vec{r}_j - \vec{r}_i|]}{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)} \quad (7)$$

$\lambda$  は変数分布の分散を解析解と一致させるための係数である。ラプラシアンモデルは、圧力や式(4)中の粘性の計算を行うためのものである。

## 3. 解析結果

本研究ではダム崩壊問題とスロッシング問題について数値実験を行った。

### 3.1 ダム崩壊問題

まず一つ目のダム崩壊問題について以下のような解析条件で解析を行う。

密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、時間ステップ  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ 、粒子一つの大きさ  $D = 0.008 \text{ m}$ 、粒子の影響半径  $r_e = 2.1 \times D$ 、動粘度  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、粒子数 1125 個、計算回数  $1/\Delta t$  回、外力として重力加速度  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  とし、水柱が崩壊する様子を解析した。Fig.1 は時間 0.2s ごとに記録したものである。

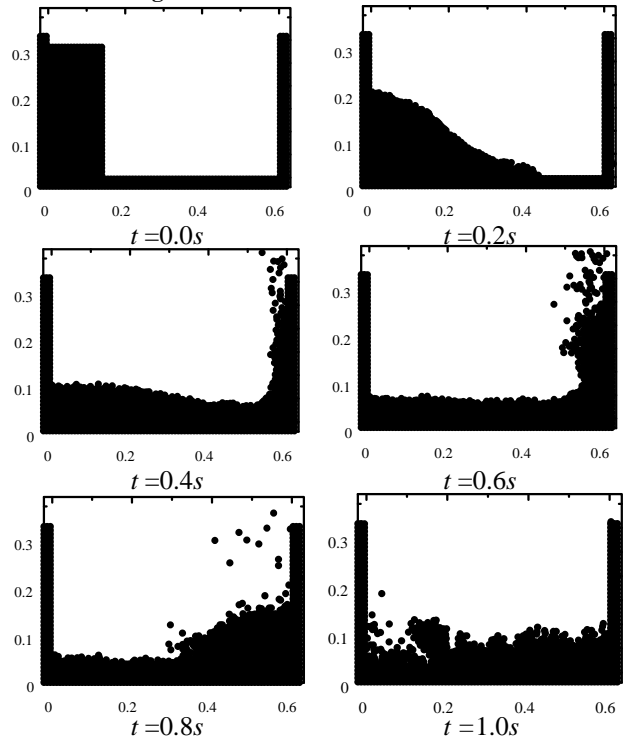


Fig.1 ダム崩壊問題の解析

Fig.1 の解析結果を見ると、0.0s から 0.2s ごとにだんだんと水柱がすべり落ちるように崩壊していくのがわかる。そして 0.4s で右側の壁に崩壊した水柱がぶつかり、0.6s で左側に流体が戻ろうとしている。この結果よりダム崩壊問題は MPS 法により計算されているといえる。

次に先の結果がどれほど正しいのかを検討してみる。先の条件と同じで動粘度  $\nu$  を 0,  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-4} m^2/s$  と変化させたときの流体粒子の先端位置の時間変化の様子を Fig.2 に示す。なお、MPS 法を開発された越塚氏の MPS 法による数値計算の結果と実験の結果も同時に示す。

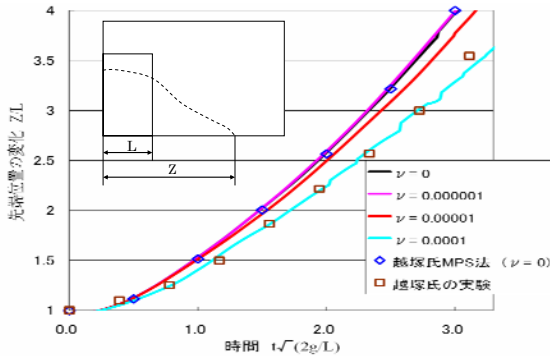


Fig.2 ダム崩壊問題における先端位置の変化

Fig.2 を見ると、 $\nu=10^{-4} m^2/s$  以外は時間経過とともに指数関数的に比較的滑らかに先端位置が変化していることがわかる。また、動粘度  $\nu$  が大きくなるにつれて先端位置の変化が遅くなっていることがわかる。つまり、流体に与えられた動粘度はきちんと流体粒子に作用していることがわかる。さらに、越塚氏の解析の結果と比較してみても  $\nu=0$  の結果と似たような結果になっていることがわかる。つまり、概ね計算に間違いはないといえる。また、越塚氏の実験を見てみると  $\nu=10^{-4} m^2/s$  の計算結果と似ていることがわかる。これは、実際の水柱崩壊実験は 3 次元の実験なので 2 次元の計算結果との差が動粘度を高くしたときの計算結果と似通ったものとなったと考えられる。

### 3.2 スロッシング問題

スロッシング問題とは、タンクに水を入れ、タンクを水平に強制振動させ、その時の液面の変位を測る実験である。

スロッシング問題の例としては、十勝沖地震で震源から 200km 以上も離れているにも関わらず、長周期地震動がタンクのスロッシングを引き起こし、タンクの全面火災を発生させ、既存の石油タンクの安全性について問題になる等が挙げられる。

ここで、 $h$  は水深、 $l$  はタンクの幅、 $A^*$  はスロッシング振幅であるとき、調和外力  $f_x$  は次式で与えられる。

$$f_x = X_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (8)$$

ここで  $X_0$  は強制振動の振幅、 $\omega$  は角振動数である。式(8)は式(4)の外力として、 $x$  方向に与え、 $y$  方向には重力加速度  $g$  を与える。

タンクにおける固有角振動数  $\omega_1$  は越塚氏らの論文<sup>(2)(3)</sup>より次のような式で与えられる。

$$\omega_1 = \left[ \frac{\pi g \tanh\left(\frac{2\pi h}{l}\right)}{l} \right]^{1/2} \quad (9)$$

解析条件として、縦横比  $h/l=0.6$ 、水深  $h=0.36m$ 、タンクの幅  $l=0.6m$ 、強制振動の振幅  $X_0=0.006m$ 、密度  $\rho=1000 kg/m^3$ 、時間ステップ  $\Delta t=0.001s$ 、粒子一つの大きさ  $D=0.01m$ 、粒子の影響半径  $r_e=2.1 \times D$ 、動粘度  $\nu=10^{-6} m^2/s$ 、粒子数 2160 個、計算回数  $20/\Delta t$  回、外力と

して重力加速度  $g=9.81 m/s^2$ 、調和外力  $f_x$  を与え、 $\omega/\omega_1$  を 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 1.0, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3 と変化させ、その時のスロッシング振幅の変化  $A^*/l$  をとった振幅応答曲線を Fig.3 に示す。なお、越塚氏らの数値計算の結果と葉山氏らの実験結果<sup>(4)</sup>も同時に示す。

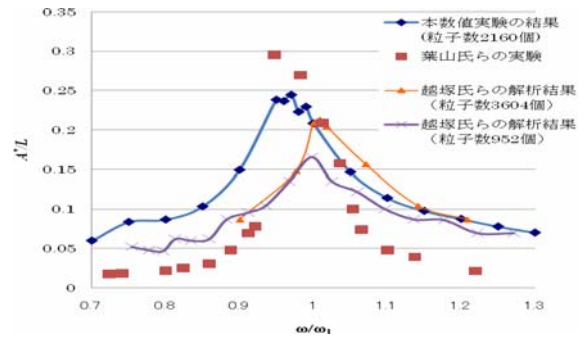


Fig.3 振幅応答曲線

Fig.3 を見ると数値実験の結果は、定性的にみれば越塚氏らの解析結果、葉山氏らの実験結果と概ね同じ結果を示している。しかし、 $\omega/\omega_1 \leq 1$  ところでは越塚氏らの解析結果より大きなスロッシング振幅を示しており、共振点の位置も  $\omega/\omega_1=1$  より左にずれているのがわかる。これはスロッシング振幅が定常状態になっていなかった可能性があったためと思われる。また、葉山氏らの実験結果よりも大きなスロッシング振幅となったのは、葉山氏らはスロッシング振幅を定常状態に近づけるために低い値からだんだんと  $\omega$  を高くする。または高い値から  $\omega$  を低くする実験動作を行ったのに対し、本研究では、初めから一定の  $\omega$  を与えたときのスロッシング振幅を取っているため葉山氏らの実験方法とは異なり、このことが葉山氏らと数値実験の結果の差であると思われる。

## 4. 結言

流れを形成しているものを粒子とみなして粒子間相互作用となる重み関数を与え、連続の式、ナビエ・ストークス方程式を粒子モデルに置き換えて MPS 法を用いて流れの数値計算を行った。

ダム崩壊問題は、動粘度が高くなると先端位置の変化は遅くなっているため、粘性の作用はきちんと働いている。また、この計算結果は越塚氏の結果と相似であるため、概ね正しいと言える。

スロッシング問題は、振幅応答曲線を見ると越塚氏らとの解析結果、葉山氏らの実験結果と定性的に一致した。しかし、本計算結果は越塚氏ら、葉山氏ら結果のよりも大きな値をとっている。これは、 $\omega$  を低くから高く、または高くから低くする実験動作をせずに振幅の値を取った等の原因が考えられる。

## 参考文献

- (1) 越塚誠一, 数値流体力学, pp.163-178, 培風館(1997)
- (2) 近澤佳隆, 越塚誠一, 岡 芳明, MPS 法を用いた液面と構造物の大変形を伴うスロッシングの数値解析, 機論, 65-637, B(1999), pp.18-24
- (3) 日本機械学会, 機械工学便覧 基礎編  $\alpha 4$  流体工学, pp.118, 丸善株式会社(2006)
- (4) 葉山眞治, 有賀啓治, 渡辺辰郎, 長方形容器におけるスロッシングの非線形応答, 機論, 49-437, C(1983), pp.22-30